Paper Industries Co. Ltd Tel 02-2224237 Fax 02-2224068 Wood Free Paper 60 gr - 50 Sheets A4 (297X210) mm.

העתקות לינאריות

אפשר לראות שיש ל $F^{m\times n}$ כמרחב ו F^n ל F^m.

כמו שראינו שמערכת $Ax=b$ היא ינ"ל מקור ל b

ע"י המרחב המינימלי ע"י A.

הגדרה תהיינה X ו Y קבוצות לא ריקות. **פונקציה** f

(**המשקה**) ו X ל Y מתאימה **לכל** $x\in X$

איבר יחיד $y\in Y$. נסמנו $y=f(x)$.

x שנקרא **הערך** של y. y הוא **התמונה** של x.

אוסף כל התמונות של איברי X שנקרא **הטווח** של f,

ומסומן כ $\mathrm{Im} f$

$$\mathrm{Im} f = \{ f(x) \in Y ; x\in X \}$$

המרחב $f: X\to Y$ הוא **חח"ע** (חד חד ערכי) אם

לאיברים שונים מ X מתאימות תמונות שונות, כלומר

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

הפונקציה f היא **על** אם $Im f = Y$

צמצום

תהי f פונקציה מ X ל Y ותהי S תת קבוצה של X. הפונקציה $f_S : S \to Y$, שמתאימה הגבלה שלה הוא S לשאר היא מוגדרת כדרך בה f, כלומר

עבור כל $x \in S$, $f_S(x) = f(x)$,

נקראת **הצמצום** של f ל S.

דוגמא: $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{a,b,c,d\}$.

$f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$.

כל הפונקציה מ X ל Y הינו לא **על** כי

d ל אין מקור. הינו כן חד-חד ערכית.

ד. נתבונן לכל פולינום ממשי את הנגזרת שלו.

$$D : R[x] \to R[x]$$
$$D(f(x)) = f'(x).$$

3.

צ"ל הפונקציה של אכן 1-1.

$X = R^2$, $Y = R_2[x]$ ב.

$f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a+2b+(3a+4b)x$

הפונקציה לא היא 1-1 ועל

3. הפונקציה הפנימית מ X ל X, מאפשרת לאורר את X לעצמו.
הפונקציה f מ X ל Y היא הפיכה

אם יש הפונקציה g מ Y ל X כך שהרכבה

$g \circ f$,

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

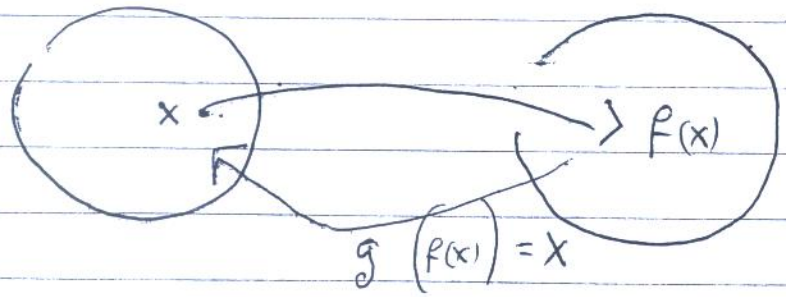
היא זהות על X

והרכבה $f \circ g$ היא זהות על Y.

נשים ל ב:

הפונקציה f מ X ל Y היא הפיכה אם ורק

f היא 1-1 ! ועל.



בדומה ל ההתאמה היא הפיכה.

המקור של $1+X$ הוא הזוג $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ שעבורו

$$a+2b=1$$
$$3a+4b=1$$

כלומר

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ד. $f(x)=x^2$ היא התאמה מ R ל R.

היא לא על ולא חד חד ערכית.

ת. הצמצום של ההתאמה ב (ה) ל

$$R_+ \equiv \{x \geq 0 \,;\, x \in R\}$$

היא כן חח"ע אבל לא על (כי היא מגדירה

כהתאמה מ R_+ ל R).

ו. ההתאמה מ R_+ ל R_+, $f(x)=x^2$, היא

5.

היא חח"ע ועל ולכן הפיכה.

ח. הפונקציה $f(x) = x^2$, מ R ל R_+ היא

על אבל לא חח"ע.

יהיו U ו V מרחבים וקטוריים מעל שדה F

הפונקציה f מ V ל U נקראת לינארית אם

לכל $u, v \in V$ ו $k \in F$ מתקיים

א. $f(u+v) = f(u) + f(v)$

ב. $f(kv) = k f(v)$

כלומר תמונה של סכום לינארי היא סכום

לינארי של התמונה.

תכונה אם f מ V ל U היא לינארית,

$f(0_V) = 0_U$.

ב דוגמאות למעלה: (ב), (ג) ו (ד) הן לינאריות

א, ה - אינן לינאריות.

דוגמאות נוספות

לא הפונקציה האפס מ V ל U מעתיקה כל וקטור

כ V לוקלור הוא כ U. האופן בו הוא

לינארי.

1. תהי $A \in F^{m\times n}$. האופן T_A, המוגדר

ע"י A ~~מוגדר~~ הוא האופן מ F^n ל F^m

$$T_A(X) = AX.$$

לאופן לינארי ומקרה נפוצה של האופן

לינארי בין מרחבים כלל מאפיינים מעניינים

כהעקבה מגדירה אי מיון.

יא. תהיינה P ו Q מטריצות כלשהי ב $F^{m\times m}$

ו $F^{n\times n}$ בהתאמה. האופן $T: F^{m\times n} \to F^{m\times n}$

שמוגדר $X \in F^{m\times n}$ ל $T(X) = PXQ$

הוא האופן לינארי.

מר. האופן $T(x,y,z) = (x+1, y^2, 3xyz)$

מ R^3 ל R^3 אינם לינארי.

7.

משפט יהיו V ו U מרחבים וקטוריים
מעל שדה F. יהי $(v_1, \dots, v_n)$
בסיס של V ויהיו $u_1, \dots, u_n$ וקטורים
(לאו דווקא ב.ת.ל.) ב U. אזי **קיימת**
העתקה לינארית יחידה T מ V
ל U כך ש

$$T(v_i) = u_i \; ; \; i = 1, \dots, n$$

משפט אם $T: V \to U$ היא העתקה לינארית
ואם $v_1, \dots, v_k \in V$ תלויים לינארית, אזי
גם $T(v_1), \dots, T(v_k)$ ת.ל.

הוכחה

נתון שיש $x_1, \dots, x_k$ כך שלא כולם שווים ל 0
ו כך ש $x_1 v_1 + \dots + x_k v_k = 0$.
לכן $0 = T(x_1 v_1 + \dots + x_k v_k) =$

$$x_1 T(v_1) + \dots + x_k T(v_k) = 0,$$

כלומר $Tv_1, \dots, Tv_k$ ת.ל. (סימון מקוצר ל-$v_1, \dots, v_k$)

בהתאם לנתון אחרת, המונה של קטורים ת.ל.

הן ת.ל.

נוסח אחר: אם $Tv_1, \dots, Tv_k$ ב.ת.ל

אז $v_1, \dots, v_k$ ב.ת.ל.

שאלת הגרעין

<u>הגרעין</u> של האופרטור לינארית T מ.ו. V

למ.ו. U הוא קבוצת כל הווקטורים ב-V שמעל 0_U.

$$\ker T = \{ v \in V ; T(v) = 0 \}$$

$\ker T$ הוא תת מרחב של V

<u>הטענה</$\ker T$, $0 \in \ker T$ סגור לכפל בסקלר ולחיבור

<u>$\operatorname{Im} T$</u> הוא תת מרחב של U.

<u>הטענה</u> $0 \in \operatorname{Im} T$, $\operatorname{Im} T$ סגור לכפל בסקלר ולחיבור.

9.

פתרון

א. D אופרטור הגזירה ו $R[x]$ ל $R[x]$:

(שימו לב שמרחב אופרטור לעצמו ו V ל V)

$\operatorname{Ker} T = R_1[x]$

$\operatorname{Im} T = R[x]$

(כי הפולינום כן)

$f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + 2b + (3a + 4b)x^2$.

$\operatorname{Ker} T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\operatorname{Im} T = R_2[x]$

ב. כי I נפיך כן X.

$\operatorname{Ker} I = \{0\}$, $\operatorname{Im} I = X$

ג. כי T_A הינו הפולינום המאפיין שלו מטריצה A.

$\operatorname{Ker} T_A = N(A)$

$\operatorname{Im} T_A = C.S.\ A$.

מסקנה הקשר בין מימד גרעין הגרעין של מטריצה

לבין מימד הדרגה שלה הוא מקרה פרטי של:

משפט יהי V מרחב וקטורי n ממדי

(תשים לב שאינו כולל ממדי U אינו חוסם כלל ממדי) ותהי T העתקה לינארית

מ V ל U אזי:

$$\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = n$$

הוכחה

יהי $(v_1 \dots v_r)$ בסיס ל $\operatorname{Ker} T$.

(יתכן $r=0$ אם $\operatorname{Ker} T = \{0\}$). נשלים אותו לבסיס ל V

$(v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$

טענה $(T(v_{r+1}), \dots, T(v_n))$ הוא בסיס ל $\operatorname{Im} T$

לאמיתו $(T(v_1) \dots T(v_n))$

פורשת את U. כיוון ש $0 = Tv_1 = \dots = Tv_r$,

$(T(v_{r+1}), \dots, T(v_n))$ פורשת את U.

לפיכך שהרי $\operatorname{Im} T$.

11.

יהי $x_{r+1} T(v_{r+1}) + \dots + x_n T(v_n) = 0$

לכן $x_{r+1} = \dots = x_n = 0$, לאמר

$T(x_{r+1} v_{r+1} + \dots + x_n v_n) = 0$

כלומר $x_{r+1} v_{r+1} + \dots + x_n v_n \in \ker T$

לכן יש $y_1, \dots, y_r$ כך ש

$x_{r+1} v_{r+1} + \dots + x_n v_n = y_1 v_1 + \dots + y_r v_r$

כלומר

$-y_1 v_1 - \dots - y_r v_r + x_{r+1} v_{r+1} + \dots + x_n v_n = 0$

ובגלל ש $(v_1, \dots, v_n)$ בסיס (V)

$y_i = 0 \; ; \; i = 1, \dots, r \; ; \; x_i = 0 \; ; \; i = r+1, \dots, n$

<u>מסקנה</u> $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T$

<u>הגדרה</u> תהי T_A ההעתקה הלינארית המתאימה

<u>מטריצה</u> A.

$$\dim \ker T_A + \dim \operatorname{Im} T_A = n$$

כלומר

$$\dim N(A) + \dim c.s.\, A = n$$

כלומר $n - \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} A^T = n$

ולכן $\operatorname{rank} A^T = \operatorname{rank} A$.

הגדרה $\dim \operatorname{Im} T$ נקרא **הדרגה** של T ומסומן $\operatorname{rank} T$

$\dim \ker T$ נקרא **האפסות** של T ומסומן $\nu(T)$

הסמן שאם T האופרטור לינארי מע' של מרחב V

אזי $\nu(T) + \operatorname{rank} T = \dim V$.

אם $\nu(T) = 0$ אומרים ש T היא **לא סינגולרית** (ל.ס.)

תרגיל 1 האופרטור לינארי T מ V ל V הינו חח"ע אם הוא ל.ס.

כיוון קודם **שלכל** האופרטור לינארית T:

התמונה של קבוצה ת.ל. הינו ת.ל.

גם כמובן ויתכן שקבוצה ב.ת.ל מועתקת לקבוצה

ת.ל. (למשל אם כל T הינו האופרטור האפס).

תרגיל 2 **אם** האופרטור לינארי T הינו ל.ס. אזי

התמונה של כל קבוצה ב.ת.ל. הינו ב.ת.ל.

יהיו V ו U מ.ו. מעל F. נסמן ב $L(V,U)$

את קבוצת האופרטורים הלינאריים מ V ל U

נגדיר ב $L(V,U)$ חיבור וכפל בסקלר על האופרטורים

$$(S+T)(v) = S(v) + T(v)$$

$$(kT)(v) = k(T(v))$$

טענה: $S+T$ ו kT הינם אופרטורים לינאריים

משפט: $L(V,U)$ הינו מ.ו. מעל F.

משפט: אם $\dim V = n$! $\dim U = m$ אז

$$\dim L(V,U) = mn$$

הוכחה: יהיו $(v_1, \dots, v_n)$ בסיס של V

ויהיו $(u_1, \dots, u_m)$ בסיס של U

נסמן ב T_{ij} את האופרטור שמעביר את v_i

ל u_j ואת שאר ה vים בבסיס ל 0_U.

T_{ij} הינו אופרטור לינארי (ב $L(V,U)$) ובמקום

T_{ij} הם בסיס של $L(V,U)$.

$i = 1, \dots, n$

$j = 1, \dots, m$

הרכבה של העתקות

הגדרנו איך משלבים הרכבה כשרוצים על העתקה הפונים לעצמה שיר:

יהיו U, V, W מ"ו מעל F.

תהיה $T \in L(U,V)$ ותהיה $S \in L(V,W)$

$$U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{S} W$$

ההעתקה ST מ U ל W המוגדרת ע"י

$$(ST)(u) = S(T(u))$$

נקרוא להרכבה של S ו T.

טענה $ST \in L(U,W)$. (כלומר ST הינה לינארית).

נשים לב: תהיינה $A \in F^{m\times n}$, $B \in F^{n\times p}$ שרשומות.

אזי ההעתקה המשויכת מ AB, T_{AB} ל F^p ל F^m ( ) היא הרכבת ההעתקות $T_A T_B$.

טענה הרכבת העתקות הינה אסוציאטיבית: מסקנה: כפל מטריצות הינה אסוציאטיבי

במצב אלפבית נשתמש לבין העתקה ממחק

לסלנו.

נסמן ב $L(V)$ את מרחב ~~האופרטורים~~ האופרטורים הלינאריים

מ V ל V (הפונקציות הלינאריות (האופרטורים) $V \to V$)

כלומר את $L(V,V)$.

אם $T \in L(V)$ אז מגדירה הרכבה T^2,

נגדיר "חזקה", T^k שהיא הרכבה של k

פעמים T. לכן ניתן להגדיר פולינום ב T

אם $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

אז $f(T) = a_n T^n + \dots + a_1 T + a_0 I$

<u>דוגמא 1</u> תהי $T \in L(R^2)$,

$T(a,b) = (a+2b, 3a+4b)$

ויהי $f(x) = x^2 + x + 1$.

חשבו את $f(T)$.

<u>הכפלה</u> תהי אותו T, חשבו את $g(T)$ כאשר

$g(x) = x^2 - 5x - 2$.

תרגיל 3 תהי $T \in L(U,V)$ ותהי

$S \in L(V,W)$. הוכיחו ש $\operatorname{rank} ST \le \operatorname{rank} S$

תרגיל 4 הוכיחו ש $\operatorname{nullity} ST \ge \operatorname{nullity} T$ (אפשר לנסות בתרגיל 3)

תרגיל 5 יהי V מרחב וקטורי סופי מימדי

ויהי $T \in L(V)$. הוכיחו ש $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^2$

אם $\operatorname{Im} T \cap \ker T = \{0\}$

תרגיל 6 יהיו U, V ו W מרחבים וקטוריים מעל F. תהיינה

$T \in L(U,V)$ ו $S \in L(V,W)$. הוכיחו

$\operatorname{rank} ST \ge \operatorname{rank} S + \operatorname{rank} T - \dim V$ ב

תרגיל 7 הוכיחו אי שוויון סילבסטר

$\operatorname{rank} AB \ge \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - n$

כאשר $A \in F^{m\times n}$ ו $B \in F^{n\times p}$

הגדרה הפיכה

~~בעלת הגדרה דומה לגבי הפיכה~~ ~~הגדרה~~ לגבי הפיכה יש הפכית ויחידה

טענה אם $T \in L(U,V)$ היא הפיכה אז

$T^{-1} \in L(V,U)$ מקיימת גם T לינארית

משפט יהיו V ו U מרחבים וקטוריים

סופי מימדיים מעל שדה F כלשהו, ותהי $T \in L(V,U)$. אזי הטענות הבאות הן שקולות:

א. T חד חד ערכית

ב. T על ($\ker T = \{0\}$)

ג. T היא על. ($\operatorname{Im} T = U$)

ד. T הפיכה.

הוכחה א' $\Longleftrightarrow$ ד'

$\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$
$= \dim \operatorname{Im} T = \dim U$
$\operatorname{Im} T = U$ לכן

ב' $\Longleftrightarrow$ ג' + א'

~~נגדיר שמרחבים וקטוריים~~

הגדרה יונד נשונר שה V אינו סופי מימדי:

$V = U = \mathbb{R}[x]$ (פולינומים). D-גזירה הוא על אבל טענה ד' לא.

$f(p(x)) = x\,p(x)$ היא על טענה ג' אבל אינו על.

נניח שמרחבים וקטוריים ו T הם אינפינטסימליים אם ישנה אפשרות לכל $v \in V$ ו $u \in U$ הם אינפינטסימליים אזי $L(V,U)$ יש אפשרות הפיכה.

הגדרת האיזומורפיזם לינארית עם מטריצה

כשם שניתן להגדיר העתקה לינארית מ־F^n ל־F^m (לדוגמה הנ"ל) ניתן להגדיר איזומורפיזם לינארית עם מטריצה.

יהי $\beta=(v_1,\dots,v_n)$ בסיס סדור של V.

יהי $\gamma=(u_1,\dots,u_m)$ בסיס סדור של U.

תהי $T\in L(V,U)$.

המטריצה המייצגת את T **בבסיסים β ו־γ** היא

$$[T]_\gamma^\beta=\left([T(v_1)]_\gamma \;\middle|\; \dots \;\middle|\; T(v_n)_\gamma\right).$$

כלומר האיבר ה־ij במטריצה המייצגת הינו הערך הקואורדינטה בבסיס γ של הווקטור

של הקואורדינטה ה־j ב־β

$[T]_\gamma^\beta=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$ קבוע בסיסים סטנדרטיים $T(a,b,c)=(a-b+2c,\ 3a+b-c)$ דוגמא:

$U=R_3[x]$ יהי $V=R_4[x]$ יהי אופס בסיס לדרגה בבסיס סטנדרטי

יהי $\beta=\{1,x,x^2,x^3\}$ יהי $\gamma=\{1,x,x^2\}$

תזכיר D האופרטור הגזירה.

$$[D]_\gamma^\beta = \left([D(1)]_\gamma \,\middle|\, [D(x)]_\gamma \,\middle|\, \dots \,\middle|\, [D(x^3)]_\gamma \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

כאשר T היא אופרטור לינארי ע"ל V,

ו $\beta = \gamma$ נסמן בקיצור

$$[D]_\beta^\beta \equiv [D]_\beta.$$

כאשר D היא אופרטור הגזירה ע"ל $R_3[x]$

ו $R_3[x]$ $\beta = \gamma = (1, x, x^2, x^3)$, נקבל

$$[D]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

הדרישה בהגדרה השקולה (כשה הבא):

<u>נשים</u> $[T]_\gamma^\beta [v]_\beta = [T(v)]_\gamma$

<u>מנמוקים</u>: $[T]_\gamma^{\cancel{\beta}} [v]_{\cancel{\beta}} = [T(v)]_\gamma$.

דוגמא

$p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$

$p'(x) = 1 + 2x + 3x^2$

אז יש

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

הערה חשובה

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

אם $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$

אזי $Tv = x_1 Tv_1 + \dots + x_n Tv_n$

$$[Tv]_\gamma = x_1 [Tv_1]_\gamma + \dots + x_n [Tv_n]_\gamma$$

$$= \left([T(v_1)]_\gamma \mid \dots \mid [T(v_n)]_\gamma \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$[T]_\gamma^\beta \, [v]_\beta .$$

הרעיון הוא לאפיין לינאריות ע"י הגדרה שמתאימה לכל

הומו' לינאריים מ $Z(V,W)$ ל F^m.

הערה על האפיון תה"ל 1 ל

אחרים:

$$[S+T]_\gamma^\beta = [S]_\gamma^\beta + [T]_\gamma^\beta$$

$$[kT]_\gamma^\beta = k[T]_\gamma^\beta$$

~~המשפט~~ הבא עוסק בהרכבה של העתקות

כמו כן הבא:

יהיו U V W מ"ו מעל F

תהי $T \in L(U,V)$, $S \in L(V,W)$

יהיו α, β, γ בסיסים סופיים

ל U, V, W בהתאמה.

אזי

$$[ST]_\gamma^\alpha = [S]_\gamma^\beta [T]_\beta^\alpha$$

<u>דוגמא כיוון</u>

$$[S]_\gamma^\beta [T]_\beta^\alpha$$

<u>הוכחה</u> יהיה u וקטור בסיס ב U

22. ~~$[(ST)u]_\gamma =$~~

אז

$$[ST]_\gamma^\alpha [u]_\alpha =$$

$$[(ST)u]_\gamma =$$

$$[S(T(u))]_\gamma = [S]_\gamma^\beta [T(u)]_\beta =$$

$$[S]_\gamma^\beta [T]_\beta^\alpha [u]_\alpha .$$

לכל u:

$$[ST]_\gamma^\alpha [u]_\alpha = [S]_\gamma^\beta [T]_\beta^\alpha [u]_\alpha .$$

לכן לכל u:

$$\left([ST]_\gamma^\alpha - [S]_\gamma^\beta [T]_\beta^\alpha\right)[u]_\alpha = 0$$

אז $Ax = 0$ לכל x, אי לכן $A = 0$

לכן

$$[ST]_\gamma^\alpha = [S]_\gamma^\beta [T]_\beta^\alpha .$$

שני בסיסים

מה קורה לוקטור קואורדינטות אם קורה לשרשרת

משינוי בין בסיס לבסיס.

יהי $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$

בסיסים של V.

יהי $v = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n$

$= y_1\beta_1 + \dots + y_n\beta_n$

אזי $[v]_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $[v]_\beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

נסמן $P = [I]^\beta_\alpha$ את מטריצת המעבר

מ α ל β, אזי מטריצת שינוי

אם הן וקטורי הקואורדינטות בבסיס β בבסיס α

שאם $[v]_\beta P = [v]_\alpha$

הוכחה $P = [I]^\beta_\alpha$

P הינו הפיכה כי

$$[I]_\alpha^\beta \, [I]_\beta^\alpha = [I]_\beta^\beta = I$$

לכן

$$[v]_\beta = P^{-1} [v]_\alpha$$

$T \in L(V, U)$ פעולה

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ יהיו

$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$

בסיסים של V

$\alpha' = (\alpha_1', \dots, \alpha_n')$ יהיו

$\beta' = (\beta_1', \dots, \beta_m')$

בסיסים של U.

תסיר β המטריצה שמייצגת את T בבסיסים

α ו α' ותסיר β המטריצה שמייצגת אותו T

בבסיסים (החדשים) β ו β'. מה הקשר

בין A ל B:

תהי P מטריצת המעבר מ α ל β

תהי Q מטריצת המעבר מ α' ל β'.

אזי

$$B = P^{-1} A Q$$

הוכחה

$$[T]_{\beta}^{\beta'} = [I]_{\beta^*}^{\alpha} [T]_{\alpha}^{\alpha'} [I]_{\alpha'}^{\beta'}$$

הגדרה: B שקולה ל A אם

קיים ליניארי מ V ל W ס"ד פעולות אלמנטריות

בשורות ופעולות אלמנטריות בעמודות.

כלומר קיים שקילות

מקיים A ו B מטריצות אם אחת מתקבלת מהשניה

(ברשימה שלנו) אם הן שקולות.

תרגיל 8 אם A הפיכה מטריצה מצא מטריצה r אל

הומשקולה למטריצה מהצורה $\begin{pmatrix} 0 & I_r \end{pmatrix}$.

דמיון מטריצות

יהי T אופרטור לינארי על V

יהי $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ בסיס ל V

ו $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ בסיס ל V

תהי A ו B המטריצות המייצגות.

$A = [T]_\alpha^\alpha = T_\alpha$, $B = [T]_\beta^\beta = T_\beta$.

מה הקשר בין A ו B?

טענה

$$B = P^{-1} A P$$

כאשר P היא מטריצת המעבר מ α ל β

הוכחה $[T]_\beta^\beta = [I]_\beta^\alpha [T]_\alpha^\alpha [I]_\alpha^\beta$

הערה: B דומה ל A אם יש מטריצה הפיכה P כך ש $B = P^{-1} A P$

דמיון הוא יחס שקילות.

מסקנה שתי מטריצות מייצגות אותו אופרטור יהיו דומות

הן דומות (ביחס לאופרטור הכלשהו $[T]_\alpha^\alpha$ ו $[T]_\beta^\beta$).

טענה למטריצה דומה יש אותו דטרמיננט ואותה עקבה.

הוכחה

$$\operatorname{trace} P^{-1}AP = \operatorname{trace} APP^{-1} = \operatorname{trace} A$$

$$\det P^{-1}AP = \det P^{-1} \det A \det P$$

$$= \det A.$$

לעומת זה אפשר להגדיר מבנה של אלגברה לדטרמינט
של אלגברה.